HANDOUT

Szemantikai értékrés Cantor édenkertjének égboltján - avagy mi az, amit megmentett Hilbert?

C: Geier János, 2009.09.18-23
Ld. még: http://www.geier.hu/Cantor/Cantor_rovid.htm
Az eredeti kissé kiegészítve és sajtóhibák javítva. 2009.10.06

Ez az írás a Ruzsa Imre emlékkonferencián (http://phil.elte.hu/ruzsaconf/) 2009.09.18.-án elhangzott 20 perces előadásom (+10 perc hozzászólás), valamint az 5 nappal későbbi Filozófiai Szeminátriumon (http://phil.elte.hu/tpf *) 2009.09.23.-án elhangzott 1 órás (+fél óra diszkusszió) előadásom alkalmával kiosztott Handout szövegével azonos, eltekintve néhány sajtóhiba javításától.*

A Filozófiai Szemináriumra beküldött absztraktot itt http://phil.elte.hu/tpf/2009-2010/September/#5 *találod.*

A Cantor tétel

Tétel: (Cantor hatványhalmaz tétele) *Tetszőleges nemüres* M *halmaz nem ekvivalens a* $H=2^M$ *hatványhalmazával.*

Bizonyítás: (a jól ismert tankönyvi verziók rekonstrukciója)

Tegyük fel indirekte, hogy M ekvivalens H-val, azaz, hogy

(1) létezik $\mathbf{B}: M \rightarrow H$ bijektív leképezés.

Tekintsük a H hatványhalmaznak azt a T elemét, melynek pontosan azok az M halmazbeli x elemek elemei, melyekhez rendelt $\mathbf{B}(x)$ halmaz nem tartalmazza elemként x-et, azaz $T \in H$ tegyen eleget a

(2) $\forall x \in M \ [x \in T \Leftrightarrow \neg\, x \in \mathbf{B}(x)]$

követelménynek ($\Leftrightarrow$ az 'ekvivalencia' logikai műveletet, $\neg$ a 'negáció' logikai műveletet jelöli. $\Leftrightarrow \neg$ helyett a 'kizáró vagy' ∇ jelet is használhatjuk itt.)

Az (1) feltétel miatt létezik $t = \mathbf{B}^{-1}(T)$, azaz

(3) $\exists t \in T \ [\mathbf{B}(t) = T]$.

A (2) és (3) kétszeri felhasználásával kapjuk:

(4) ha $[t \in T]$ akkor $[t \notin \mathbf{B}(t)]$ azaz $[t \notin T]$, és ha $[t \notin T]$ akkor $[t \in \mathbf{B}(t)]$ azaz $[t \in T]$.

Ez ellentmondás, amivel

(*) cáfoltuk a kiinduló (1) indirekt feltételezésünket.

QED.

Erre a továbbiakban 'Cantor levezetés' elnevezéssel hivatkozunk.

* * *

Állítás: Ez a levezetés hibás, nem bizonyítja a konklúziónak szánt állítást, azaz (1) tagadását. A hiba lényege: nem bizonyított, hogy a (2) követelményt kielégítő T halmaz szükségképpen létezik. Sőt ennek fordítottja igaz: amikor a levezetés során eljutunk (2) -ig, már ott bizonyítható (anélkül, hogy hivatkoznánk a levezetés folytatására!), hogy az (1) feltétel fennállása mellett a (2) követelményt kielégítő $T\in H$ nem létezik. Emiatt a (3) és a (4) -ben lévő kifejezések értelmezhetetlenek, ezért a levezetésben nem lehet eljutni a (4) ellentmondás kimutatásáig.

A következőkben'∇' a 'kizáró vagy' logikai művelet jele, '$\cong$' a formulahelyettesítés metanyelvi jele.
Definíció: Legyen $U \subseteq V$ és $\mathbf{R}$ az (U,V) páron értelmezett reláció. Az **R** relációból származtatott diagonalizációs tulajdonságot a következő formulával definiálom:

$$\mathbf{D}(v) \cong \forall x\in U\ [\mathbf{R}(x,x)\ \nabla\ \mathbf{R}(x,v)]\ ,\quad v\in V.$$

Tétel (Diagonalizációs tétel): Legyen U=V. Akkor az **R**-ből származtatott diagonalizációs tulajdonság kielégíthetetlen a V halmazon, azaz tetszőleges $v\in V$-re $D(v) = \mathbf{h}$, azaz $\forall v\in V\ [\neg D(v)]$.

Biz: Legyen $e\in V$ tetszőleges rögzített elem. A $\mathbf{\Phi}_e(x) \cong [\mathbf{R}(x,x)\ \nabla\ \mathbf{R}(x,e)]$ kifejezésben elvégezve a $x = e$ helyettesítést, a 'kizáró vagy' logikai művelet igazságtáblázata alapján kapjuk, hogy $\mathbf{\Phi}_e(e) = \mathbf{h}$. Tehát létezik olyan $x\in V$, melyre $\mathbf{\Phi}_e(x)=\mathbf{h}$, ezért hamis (**h**) az az állítás, hogy $\mathbf{\Phi}_e(x)$ minden $x\in V$-re **i**, azaz $[\forall x\in V\ \mathbf{\Phi}_e(x)\ ] = \mathbf{h}$, azaz $\mathbf{D}(e) = \mathbf{h}$.

Mivel e-t tetszőlegesen választottuk, ezzel a tételt bebizonyítottuk. QED.

Megjegyzés: Ez nem indirekt bizonyítás.
Tétel_2: *A*

(1') $$[\text{ létezik } \mathbf{B}: M \to H \text{ bijektív leképezés }]$$

feltétel fennállásakor <u>nem</u> létezik a (2) *követelménynek eleget tévő* $T \in H$
azaz nem létezik olyan $T\in H$, melyre

(2') $$\forall x \in M\ [x\in T\ \ \nabla\ \ x\in \mathbf{B}(x)]$$

Bizonyítás:
Egyelőre használjunk ki annyit, hogy **B** injektív és jelöljük **B** képterét K -val, $K \subseteq H$.
Bevezetve a $X=\mathbf{B}(x)$ jelölést (ahol $x \in M$), (2) ezzel ekvivalens:

(5) $$\forall\ X\in K\ [\mathbf{B}^{-1}(X)\in T\ \ \nabla\ \ \mathbf{B}^{-1}(X)\in X];\ T\in H\ .$$

Definiáljuk az **R**(X,Y) relációt így:

(6) $$\mathbf{R}(X,Y) \cong [\mathbf{B}^{-1}(X) \in Y];\quad X \in K,\ Y \in H.$$

Ezt felhasználva (5) ezzel ekvivalens:

(7) $$\forall\ X\in K\ [\mathbf{R}(X,T)\ \nabla\ \mathbf{R}(X,X)];\quad T \in H.$$

Látható, hogy (7) nem más, mint a (6)-ban definiált **R** relációból származtatott **D**(T) diagonalizációs tulajdonság és ez ekvivalens (2) –vel.

Az (1) feltétel azzal ekvivalens, hogy létezik olyan *injektív* $\mathbf{B}: M \to H$ leképezés, mely egyben *szürjektív* is, azaz K=H. Ez megfelel a Diagonalizációs tétel U=V feltételének, így a Diagonalizációs tétel alkalmazásával kapjuk, hogy minden $T\in H$ -ra $\mathbf{D}(T) = \mathbf{h}$.
<u>*Tehát (1) fennállásakor nem létezik a (2) követelménynek eleget tévő T∈H.*</u> **QED.**

Következmény: A Cantor levezetése elakad a (2) pontnál, mivel azon túl egy addigra bizonyítottan nem létező T objektumra hivatkozik. Azt, hogy ilyen T nincs, a kiinduló indirekt feltételekre támaszkodva, de a

(2) ponton túli folytatástól független, önálló gondolatmenettel vezettem le. Mivel a Cantor levezetés az ellentmondás kimutatása előtt elakad, ezért ez egy hibás levezetés.

Kapcsolat a ZFC részhalmaz axióma sémájával. Wolfram szerint (eredeti betűjelek kissé átalakítva):

$$\forall M\ \forall p\ \exists T\ \forall x\ (\ x \in T \Leftrightarrow (x \in M\ \&\ \varphi(x;p)))$$

azaz: ha φ egy tulajdonság (p paraméterrel), akkor tetszőleges M halmaz és p paraméter esetén létezik az a $T = \{x \in M \mid \varphi(x;p)\}$ halmaz, mely az M halmaznak pontosan azokat az x elemeit tartalmazza, melyeknek rendelkeznek a φ tulajdonsággal.

Alkalmazás a Cantor levezetésre. Legyen: $p \cong \mathbf{B}$, ($\mathbf{B}$ az (1) szerinti) és $\varphi(x;p) \cong \neg(x \in \mathbf{B}(x))$
akkor $\forall M\ \forall \mathbf{B}\ \exists T\ \forall x\ (\ x \in T \Leftrightarrow (x \in M\ \&\ \neg(x \in \mathbf{B}(x)))$
Azaz e konkrét axióma azt állítja, hogy tetszőleges M halmaz és bijektív $\mathbf{B}: M \to H$ leképezés esetén <u>létezik</u> a H hatványhalmaznak <u>az a T eleme</u>, melyre
(**) $\forall x \in M\ (x \in T \Leftrightarrow \neg(x \in \mathbf{B}(x)))$.

A (**) azonos a (2) követelménnyel. Tehát a ZFC részhalmaz axióma sémája alapján egy olyan konkrét axiómát állítottunk elő, mely pontosan az ellenkezőjét állítja annak, amit a Diagonalizációs tétel alkalmazása állít a Cantor levezetésre (ld. Tétel_2). Ez ellentmondás, amiből úgy (is) ki lehet kerülni, hogy tagadjuk a **B** bijektivitását. Ezzel a formális segédlettel tehát a Cantor hatványhalmaz tétel a ZFC-ben bizonyítható. Ez elgondolkodtató!